SEPARABILNÍ METRICKÉ PROSTORY

Definice: Řekneme, že MP (M,d) je *separabilní*, pokud $\exists D \subseteq M$: D je spočetná nejvýše spočetná $\wedge\ \overline{D} = M$.

Říkáme, že D je hustá v M.

Poznámka: NVJE: (i) D je hustá v M

(ii) $\forall x \in M$: $d(x,D) = 0$

(iii) $\forall G \subseteq M$: $\emptyset \neq G$ je ot. $\Rightarrow G \cap D \neq \emptyset$.

Důkaz: Snadné cvičení.

Věta 23: Buď (M,d) MP. Pak NVJE:

(i) M je separabilní

(ii) Existuje spočetná množina otevřených podmnožin $B_n \subseteq M$ $(n \in \mathbb{N})$ tak, že $\forall G \subseteq M$ ot.: $\exists I \subseteq \mathbb{N}$: $G = \bigcup_{n \in I} B_n$

(iii) Každý podprostor M je separabilní

(iv) každá ε-separovaná množina je spočetná

(spočetná $\equiv$ nejvýše spoč.)

Důkaz:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Mějme nějakou spočetnou hustou podmnožinu $D \subseteq M$. $(\overline{D} = M)$

$D = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$.

$B_{(i,j)} := B(x_i, \frac{1}{j})$. $\mathbb{N}^2$ … spočetná.

Nechť je dána libovolná ot. $G \subseteq M$.

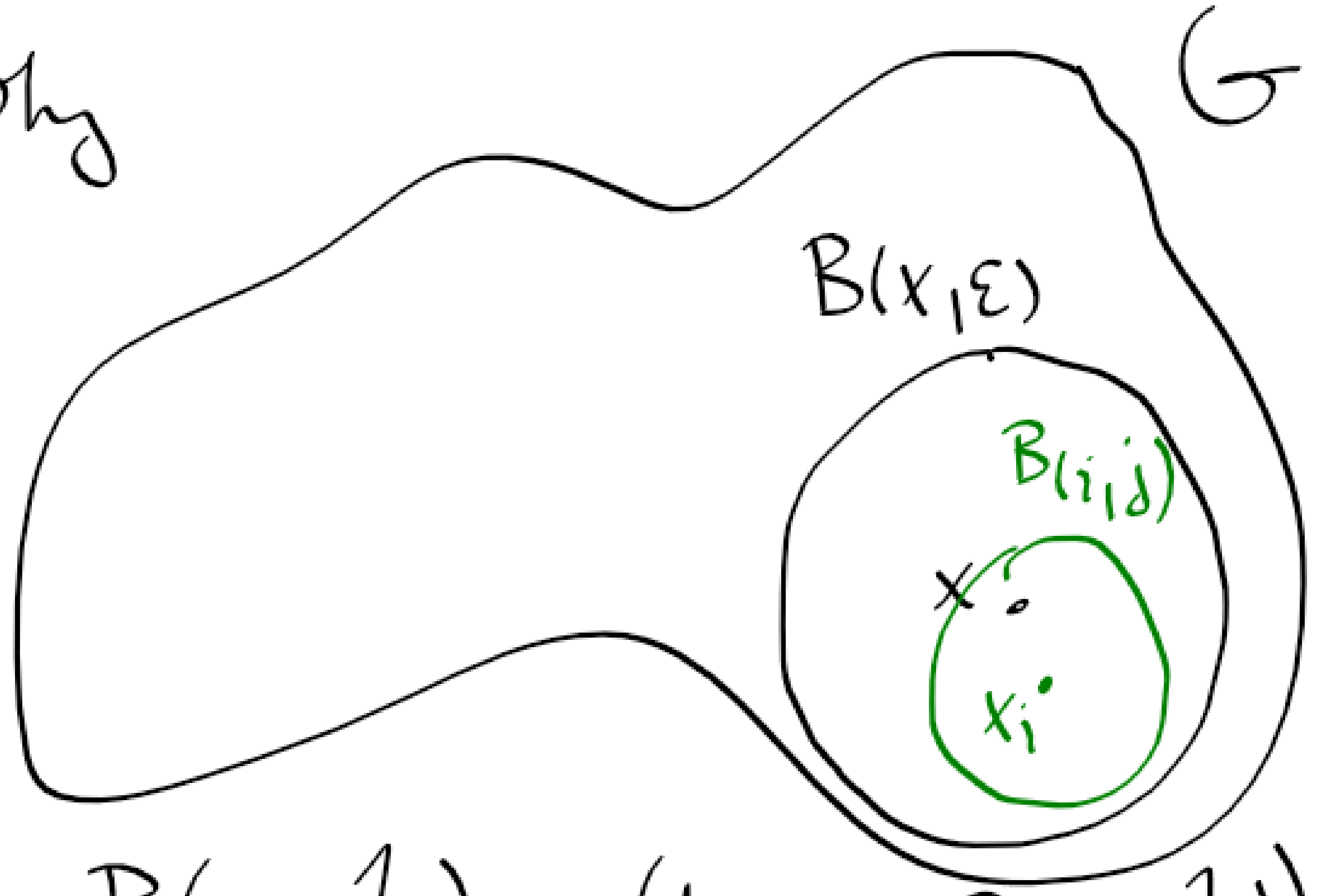
Chceme: $G = \bigcup_{(i,j) \in I} B_{(i,j)}$, kde

$I := \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : B_{(i,j)} \subseteq G\}$.

Zvolme $x \in G$. Chceme: $\exists (i,j) \in I$: $x \in B_{(i,j)}$

Protože G je otevřená, $\exists \varepsilon > 0$: $B(x,\varepsilon) \subseteq G$.

Podle definici hustoty najdeme $j \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{j} < \frac{\varepsilon}{2}$.



najdeme $i \in \mathbb{N}$: $x_i \in B(x, \frac{1}{j})$ (tj. $x \in B(x_i, \frac{1}{j})$).

Pak $B_{(i,j)} \subseteq B(x,\varepsilon) \subseteq G$. Tedy

$$x \in \bigcup_{(i,j)\in I} B_{(i,j)}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): nechť B_n mají vlastnost z (ii).
Chceme ukázat, že M je separabilní.
Vybereme $x_n \in B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Pak
$D := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ je hustá.

Skutečně, buď $\emptyset \neq G \subseteq M$ ot.
Pak $G = \bigcup_{n \in I} B_n$ pro nějž. $I \subseteq \mathbb{N}$.
Tím padem $\forall n \in I: x_n \in B_n \subseteq G$,
tj. ($I \neq \emptyset$) některé prvky D jsou v G.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Buď $N \subseteq M$ libovolný podpr.
Chceme: N je separabilní. Stačí, že N splňuje (ii), tj. má spoč. bázi ot. mn.

---

nejsou nutně koule / jsou ot.

M má spoč. bázi ot. mn. $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$

Tvrdím, že $\{B_n \cap N : n \in \mathbb{N}\}$ má vlastnost z (ii) (tj. je to báze) pro N.

nechť $G \subseteq N$ je libovolná ot. v N.

<u>Víme</u> $\exists\, G' \subseteq M$ ot. v M : $G = G' \cap N$.

Protože M splňuje (ii), $\exists\, I \subseteq \mathbb{N}$:

$$\bigcup_{n\in I} B_n = G'.$$

Tedy

$$G = G' \cap N = \Big(\bigcup_{n\in I} B_n\Big) \cap N =$$

$$= \bigcup_{n\in I} (B_n \cap N).$$

Tedy N splňuje (ii), a tedy je sep.
((ii) $\Rightarrow$ (i) už víme ... aplikuj ji na N).

Tedy všechny podpr. M jsou sep., tj. (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) nechť M splňuje (iii).

Budiž dáno $\varepsilon > 0$ a libovolná ε-sep. podmnožina $A \subseteq M$. <u>Chceme:</u> $|A| \le |\mathbb{N}|$

A, jakožto podprostor M, je separabilní.

Pro libovolné $x \in A$ jest

$$B(x,\varepsilon) \cap A = \{x\}.$$

Je-li nyní D spočetná hustá v (A,d), pak $\forall x \in A$ $D \cap \underbrace{B(x,\varepsilon)}_{\text{ot.}} \neq \emptyset$, tj.

$\forall x \in A$: $x \in D$. Tedy $D = A$, a

A je spočetná.

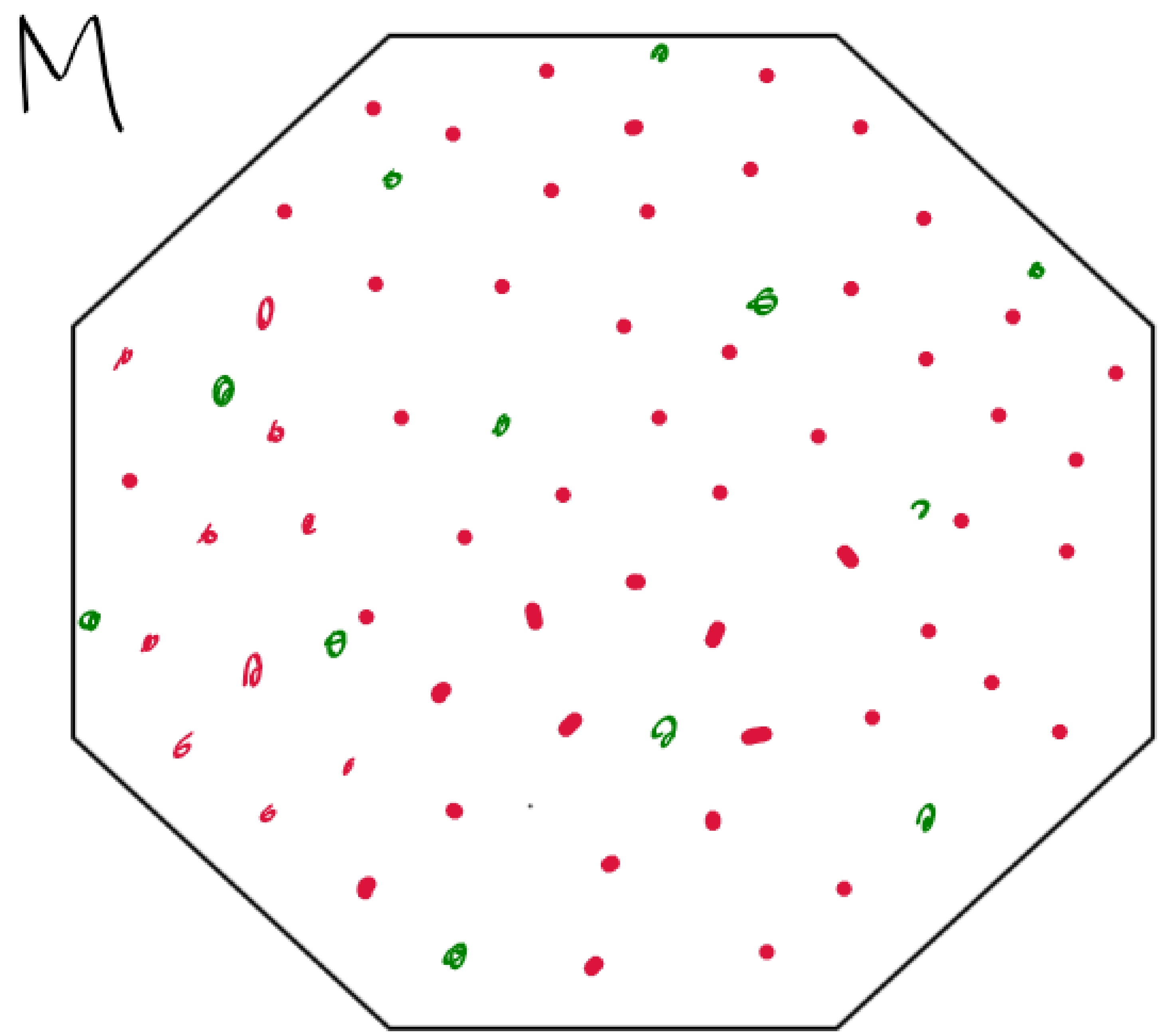
(iv) $\Rightarrow$ (i): nechť $\forall \varepsilon > 0$ je každá ε-sep. množina konečná.

Pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ uvažujme maximální $\frac{1}{n}$-sep. podmnožinu $S_n \subseteq M$.

$\left[S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \quad \text{je hustá v } M \right]$:

Dk: nechť $x \in M$, $\varepsilon > 0$ jsou dány. Najděme $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Tvrdím, že existuje $y \in S_n$: $d(x,y) < \frac{1}{n}$. Kdyby NE, pak $S_n \cup \{x\}$ by byla $\frac{1}{n}$-separovaná, což by byl spor s maximalitou S_n.

Tedy $y \in S$ a $d(x,y) < \frac{1}{n} < \varepsilon$. $\boxtimes$



Museli jsme použít Zornovo lemma, potažmo (ekviv.) AC.

Tvrzení 24: Pro prostory (M_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$ splňující $\operatorname{diam} M_n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, platí: $\prod_{i=1}^{\infty} (M_i, d_i)$ je sep. $\iff \forall i: (M_i, d_i)$ je separabilní.

Důkaz: Cv.

Příklady: (1) $\mathbb{R}$ je separabilní, ale ne TO.

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ je 1-sep., nekonečná $\Rightarrow$ není TO
- $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ $\quad (\forall G \subseteq \mathbb{R}: G \overset{\neq \emptyset}{\text{ je ot.}} \Rightarrow \mathbb{Q} \cap G \neq \emptyset)$

(2) V23: $\Rightarrow$ $\quad$ (M je sep. $\Rightarrow$ M je TO).

(3) Nechť $c_0 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$

Definujeme $d_\infty((a_n), (b_n)) = \max\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}$

Označme $C_\mathbb{Q}$ množinu všech posl. $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{Q}$ takových, že

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0: x_n = 0.$$

Zřejmě $C_\mathbb{Q} \subseteq C_0$.

- $C_\mathbb{Q}$ je spočetná: $C_\mathbb{Q} = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_\mathbb{Q}^m$, kde $C_\mathbb{Q}^m$ obsahuje ty prvky $(x_n) \in C_\mathbb{Q}$, že

$$\forall n \geq m: x_n = 0$$

Stačí: $\forall m: |C_\mathbb{Q}^m| \leq |\mathbb{N}|$:

$$C_\mathbb{Q}^m \approx \mathbb{Q}^{m-1}.$$

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{Q}^{m-1} \longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 0, 0 \dots) \in C_\mathbb{Q}^m$$

je bijekce.

• $C_{\mathbb{Q}}$ je hustá v c_0 v metrice

$d_\infty((a_n),(b_n)) = \max\{|a_n - b_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

Mějme $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ (tj. $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$, $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$)

$\varepsilon > 0$ jsou dány.

Podle definice limity $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0$:

$|x_n| < \varepsilon/2$

Zvolme pro $i \in \{1, \dots, n_0 - 1\}$ $q_i \in \mathbb{Q}$,

že $|q_i - x_i| < \varepsilon/2$.

Pak $(q_n) = (q_1, \dots, q_{n_0-1}, 0, 0, \dots) \in$

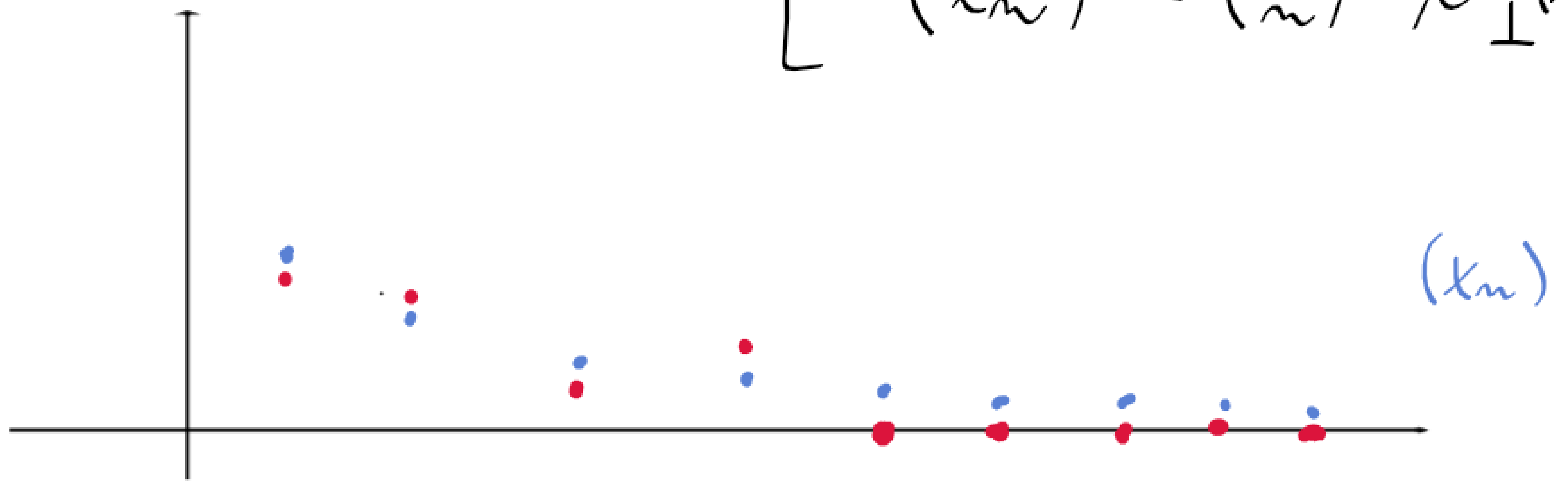
$\in C_{\mathbb{Q}}^{n_0} \subseteq C_{\mathbb{Q}}$.

$d_\infty((x_n),(q_n)) \leq \max\{|q_i - x_i| : i \in \{1, \dots, n_0 - 1\}\}$

$\vee \max\{|x_n - 0| : n \in \mathbb{N}\} \leq$

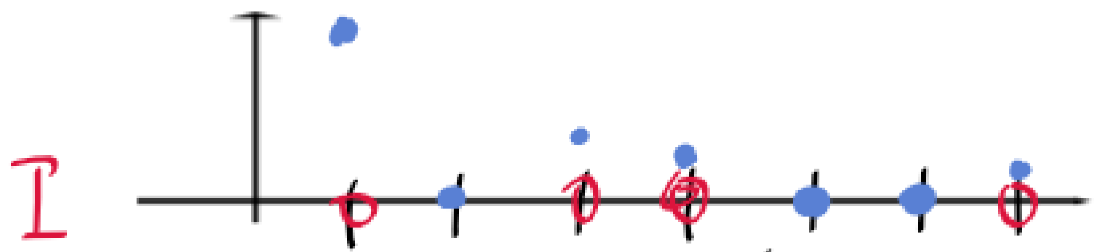
$\leq \varepsilon/2 \vee \varepsilon/2 = \varepsilon/2$. ☒

$\left[(x_n^I) = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \chi_I(n) \right]$



Pozn.: $\{(x_n) \subseteq \mathbb{Q} : x_n \to 0\}$ je nespočetná.

Stačí: $(x_n^I) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{pokud } n \in I \\ 0, & \text{pokud } n \notin I \end{cases}$, $I \subseteq \mathbb{N}$.



jsou různé posloupnosti $\mathbb{Q}$-čísel jdoucí k nule.

$I \longmapsto (x_n^I)$ je bijekce $P(\mathbb{N})$ na $\{(x_n^I) \dots\}$

Prostor $C([0,1])$

$$C([0,1]) := \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ spojitá} \}$$

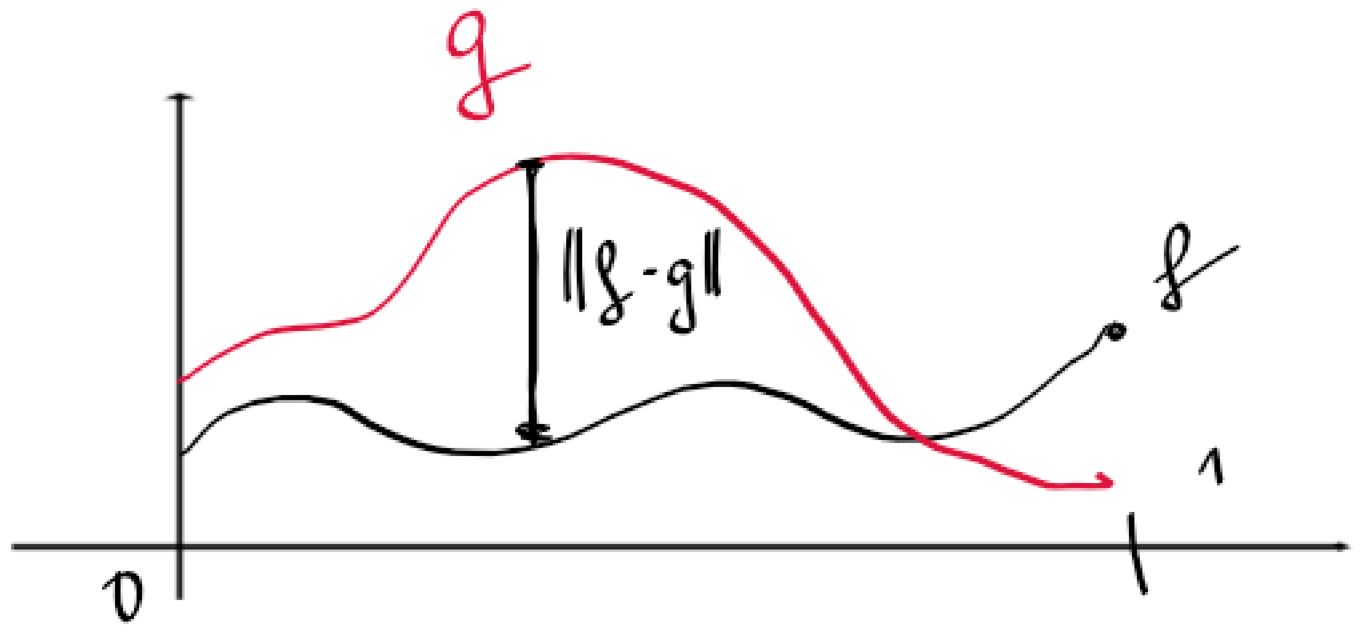
je to VP, tzn. můžeme definovat

$$\| f \|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

Vzdálenost f, g je definována

$$d_\infty(f,g) = \| f - g \|_\infty =$$

$$= \max_{t \in [0,1]} | f(t) - g(t) |$$



- $C([0,1])$ je separabilní.